

<b>3.0/2.0 VU Formale Modellierung</b>			
185.A06		SS 2020	26. März 2021
Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe <b>A</b>

**Aufgabe 1 (10 Punkte)** Professor John Frink organisiert eine internationale Konferenz und sucht zur Unterstützung Student Volunteers. Nach zahlreichen Vorstellungsgesprächen schränkt er die Auswahl auf Bart, Janey, Lisa, Milhouse und Richard ein, wobei allerdings nur Lisa und Richard auch Fremdsprachen beherrschen. Er stellt folgende Überlegungen an:

- Janey möchte ich auf jeden Fall, sie hat bei der letzten Konferenz schon erfolgreich mitgearbeitet.
  - Ich kann höchstens drei Volunteers anstellen.
  - Ich brauche jedenfalls mindestens einen Volunteer, der Fremdsprachen spricht.
  - Richard und Milhouse kennen die Räume, in denen die Konferenz stattfinden soll. Einen der beiden sollte ich auf jeden Fall nehmen, aber beide zu nehmen ist nicht notwendig.
  - Richard will nur mitmachen, wenn ich auch Bart anstelle.
  - Milhouse und Lisa wollen nur gemeinsam genommen werden, da sie andernfalls zusammen auf Urlaub fahren wollen.
- a) Formalisieren Sie die beschriebene Situation inklusive aller Anhaltspunkte mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.
- b) Welche Möglichkeiten hat Professor Frink sein Personalproblem zu lösen? Begründen Sie Ihre Antwort(en) mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

**Aufgabe 2 (10 Punkte)** Seien *Bekämpft/2*, *Jedi/1*, *Sith/1* und *Dunkel/1* Prädikaten-symbole sowie *yoda* ein Konstantensymbol mit folgender Bedeutung:

<i>Jedi</i> ( <i>x</i> ) ... <i>x</i> ist ein Jedi-Ritter	<i>Bekämpft</i> ( <i>x, y</i> ) ... <i>x</i> bekämpft <i>y</i>
<i>Sith</i> ( <i>x</i> ) ... <i>x</i> ist ein Sith	<i>yoda</i> ... Yoda
<i>Dunkel</i> ( <i>x</i> ) ... <i>x</i> ist dunkel	

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

- a) Es gibt dunkle Sith, die alle Jedi-Ritter bekämpfen.
- b) Kein Jedi-Ritter bekämpft alle Sith.

Sei weiters folgende Interpretation  $I$  gegeben:

$$\mathcal{U} = \{\text{Obi-Wan, Yoda, Luke, Anakin, DarthVader, DarthBane, DarthMaul, DarthTyrannus, DarthSidious, Yaddle}\}$$

$$I(\text{Jedi}) = \{\text{Obi-Wan, Yoda, Luke, DarthVader, Yaddle}\}$$

$$I(\text{Sith}) = \{\text{DarthVader, DarthBane, DarthMaul, DarthTyrannus}\}$$

$$I(\text{Dunkel}) = \{\text{DarthBane, DarthVader, Anakin}\}$$

$$I(\text{Bekämpft}) = \{(\text{Obi-Wan, DarthTyrannus}), (\text{Obi-Wan, DarthBane}), (\text{Obi-Wan, DarthMaul}), (\text{Yoda, DarthMaul}), (\text{Yoda, DarthTyrannus}), (\text{Luke, Anakin}), (\text{Luke, DarthTyrannus}), (\text{DarthVader, Luke}), (\text{DarthVader, DarthVader}), (\text{Anakin, Obi-Wan}), (\text{Anakin, Luke}), (\text{Anakin, DarthVader}), (\text{DarthBane, Obi-Wan}), (\text{DarthBane, Luke}), (\text{DarthBane, Yoda}), (\text{DarthSidious, Yaddle})\}$$

$$I(\text{luke}) = \text{Luke}$$

$$I(\text{darthvader}) = \text{DarthVader}$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der angegebenen Interpretation  $I$  wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

c)  $\exists x (\text{Dunkel}(x) \wedge \text{Sith}(x) \wedge (\text{Bekämpft}(x, \text{luke}) \neq \text{Bekämpft}(x, \text{darthvader})))$

d)  $\forall x \exists y (\text{Jedi}(x) \wedge \text{Sith}(y) \wedge \text{Bekämpft}(x, y))$

e)  $\forall x (\text{Dunkel}(x) \supset \text{Bekämpft}(x, \text{luke}))$

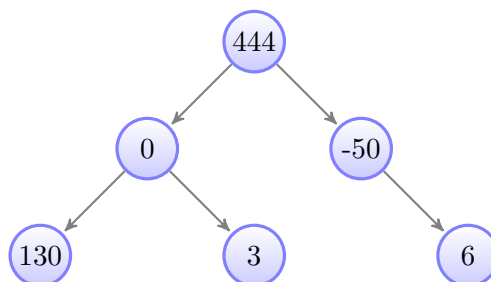
f)  $\forall x (\text{Jedi}(x) \supset \exists y (\text{Sith}(y) \wedge \text{Bekämpft}(y, x)))$

**Aufgabe 3 (10 Punkte)** Binäre Bäume zur Speicherung ganzer Zahlen können als lineare Zeichenketten kodiert werden, indem jeder Knoten des Baums als

$$\langle \text{linkerBaum Zahl rechterBaum} \rangle$$

dargestellt wird. Die spitzen Klammern sind Teil der Kodierung, *Zahl* steht für ein dezimales Numeral mit optionalem Vorzeichen. Für diese Aufgabe legen wir fest, dass Numerale keine führenden Nullen aufweisen dürfen. Negative Zahlen beginnen mit einem Minuszeichen, nichtnegative Zahlen tragen kein Vorzeichen. *linkerBaum* bzw. *rechterBaum* kodieren den linken bzw. rechten Teilbaum. Der leere binäre Baum wird durch  $\langle \rangle$  dargestellt. Sei  $\mathcal{B}$  die Menge aller Zeichenketten, die auf diese Weise binäre Bäume kodieren.

Beispiel: Die Zeichenkette  $\langle \langle \langle \langle \rangle 130 \rangle \rangle 0 \langle \langle \rangle 3 \rangle \rangle \rangle 444 \langle \langle \rangle -50 \langle \langle \rangle 6 \rangle \rangle \rangle \rangle$  kodiert den binären Baum



Die Blätter des Baumes werden durch die Zeichenketten  $\langle\langle 130 \rangle\rangle$ ,  $\langle\langle 3 \rangle\rangle$  und  $\langle\langle 6 \rangle\rangle$  dargestellt; bei Blättern sind sowohl der linke als auch der rechte Unterbaum leer.

- Beschreiben Sie die Sprache  $\mathcal{B}$  mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren.
- Handelt es sich bei  $\mathcal{B}$  um eine reguläre Sprache, d.h., lässt sich diese Sprache im Prinzip auch durch einen (komplizierten) regulären Ausdruck spezifizieren? Falls ja, skizzieren Sie den Ausdruck in einer der in der Vorlesung behandelten Notationen. Falls nein, begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 4 (10 Punkte)** Ein elektronisches Tresorschloss besteht aus einem zweistelligen Display sowie den Tasten  $+$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $Ok$  und  $Reset$ . Jede Stelle des Displays kann eine der drei Ziffern 0, 1 oder 2 anzeigen. Mit jedem Drücken der  $+$ -Taste ändert sich die Anzeige der aktiven Stelle von 0 auf 1, von 1 auf 2 bzw. von 2 auf 0. Welche der beiden Stellen aktiv ist, lässt sich durch die  $L$ - und  $R$ -Taste kontrollieren: Ein- oder mehrmaliges Drücken der  $L$ - bzw.  $R$ -Taste aktiviert die linke bzw. rechte Stelle. Im Anfangszustand zeigt das Display die Zahl 00 an und die linke Stelle ist aktiviert. Wird die Zahl 21 eingestellt und anschließend die  $Ok$ -Taste gedrückt, öffnet das Schloss; bei jeder anderen Zahl geht das Schloss in einen Fehlerzustand. Sowohl im geöffneten Zustand als auch im Fehlerzustand werden alle weiteren Tasten ausgenommen  $Reset$  ignoriert, d.h., sie beeinflussen den Zustand des Schlosses nicht. Wird zu einem beliebigen Zeitpunkt die  $Reset$ -Taste gedrückt, geht das Schloss wieder in den Anfangszustand über. Das Schloss lässt sich zum Beispiel mit jeder der beiden folgenden Tastenkombinationen öffnen:

$++R+Ok$

$+Reset+LR+L+OkOk$

- Überlegen Sie, welche Informationen notwendig sind, um den Zustand des Schlosses zu beschreiben. Wieviele Zustände kann das Schloss annehmen? Wieviele Zustände sind es im Allgemeinen, wenn das Schloss  $n$  Ziffern (statt 3) pro Stelle sowie  $k$  Stellen (statt 2) besitzt?
- Legen Sie die möglichen Aktionen fest, die zu einem Zustandswechsel führen.
- Geben Sie einen endlichen Automaten an, der das Verhalten des beschriebenen Schlosses vollständig beschreibt. Die Sprache des Automaten sollen genau jene Tastenkombinationen sein, die den Tresor öffnen. Spezifizieren Sie die Übergangsfunktion des Automaten mittels einer Tabelle.

**Aufgabe 5 (10 Punkte)** Sind folgende Gleichungen für beliebige Sprachen  $L$  gültig? Falls ja, begründen Sie warum, falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a)  $L \cup \{\epsilon\} = L \cdot \{\epsilon\}$

b)  $\{\epsilon\} \cdot L^* = L^+$

c)  $(L \cdot L)^* = L^* \cdot L^*$

d)  $L^+ \cup \{\epsilon\} = L^* \cdot \{\epsilon\}$